…………DOI：10.13334/j.0258-8013.pcsee.171912 文章编号：0258-8013 (2017) 00-0000-00 中图分类号：TM 712

基于特征子系统的广义短路比导出原理及计算方法

辛焕海 [1]，刘晨曦 [1]，黄林彬 [1]，高晖胜 [1]，鞠平 [1]
（1. 浙江大学电气工程学院，浙江省 杭州市 310027）

Derivation Principle and Calculation Method of Generalized Short-circuit Ratio Based on Eigen-Subsystems

XIN Huanhai[1], LIU Chenxi[1],HUANG Linbin[1], GAO Huisheng[1], JU Ping[1]
(1. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, Zhejiang Province, China)

ABSTRACT: With the large-scale integration of renewable energy and grid-following power electronic devices, system voltage support strength decreases, thus threatening the system's safe and stable operation. In the homogeneous scenario where power electronic devices integrated into the system have the same dynamics, a theoretically rigorous and highly stable quantitative method for quantifying system voltage support strength can be formed based on the generalized short-circuit ratio(gSCR) and the device or station critical short-circuit ratio(SCR_0) In the heterogeneous scenario where power electronic devices integrated into the system have weakly different dynamics, system voltage support strength can be quantified by the first-order approximation of gSCR and SCR_0, based on some special characteristics of devices and power grid. However, there is a lack of unified derivation principles and calculation methods. To this end, this paper focuses on quantifying voltage support strength under small-signal stability and discovers that the multi-infeed system can be approximately decoupled into multiple low-dimensional systems. On this basis, this paper proposes the concept of eigen-subsystem and its calculation method and interprets their physical significance. Based on the concept of eigen-subsystems, the derivation principle and calculation method of gSCR and SCR_0 are given. Additionally, the specific calculation methods for indices are provided when considering grid-following converters under non-rated operating conditions, reverse active power output and grid-forming devices. Finally, the effectiveness of the principles and methods is verified in several cases.

KEY WORDS: generalized short-circuit ratio; device or station critical short-circuit ratio; eigen-subsystems

摘要：随着跟网型新能源/电力电子装备的大规模接入，系统电压支撑强度降低，新型电力系统的安全稳定风险增加。在同构新能源/电力电子装备接入场景下，利用电网广义短路比和装备/场站临界短路比可以形成与稳定性强相关的系统电压支撑强度量化方法；在弱异构场景下，基于装备和电网动态的特殊性质，利用广义短路比和装备/场站临界短路比的一阶近似可以实现强度量化，但缺乏统一的导出原理及计算方法。为此，本文聚焦小扰动维度下电压支撑强度量化问题，首先利用多馈入系统可近似解耦为多个低维子系统的规律，提出特征子系统的概念和计算方法，并诠释了其物理意义；其次，基于特征子系统，提出了广义短路比及装备/场站临界短路比的导出原理及计算方法。此外，针对电力电子装备在非额定运行点、部分装备有功功率反向以及包含构网型装备的场景下，给出了广义短路比的具体计算公式。最后，算例验证了所提原理和方法的有效性。

关键词：广义短路比；装备/场站临界短路比；特征子系统

0 引言

随着新能源的快速发展，电力系统逐步演化成含有高比例新能源及电力电子装备（后文简称为“装备”）的新型电力系统[1][2]。电压支撑强度表征了扰动下系统电压抵抗偏移以及抵抗失稳的能力，强度高表明系统抵御被外力破坏的能力强，受扰后电压响应性能好。然而，具有强支撑作用的同步机占比减少，新能源集中并网容量大、与主网电气距离远且常采用跟网型控制策略而对电网支撑强度弱，使得新型电力系统电压支撑强度变低，受扰后安全稳定风险增加[3]-[7]，亟需科学的强度量化和计算方法（考虑到低惯量维度的强度问题可以分开考虑，后文为表述方便，将系统电压支撑强度简写为“系统强度”）。

大规模跟网型装备（如不特别说明，后文简称“装备”）接入后，系统强度的分析计算存在以下难点：装备及电网母线数量多，且装备与网络动态交互复杂，高维动态特征难以简化；装备种类多，如控制策略和参数等各异的跟网型变流器或构网型变流器等[8]-[11]，进一步增加了系统的复杂度；新能源运行工况多，也给强度量化带来巨大挑战。

为分析系统强度且方便工程应用，工业界常用电网强度近似表征系统强度，并引入单馈入和多馈入短路比作为量化指标。其中，电网强度表征了在

基金项目：国家自然科学基金联合基金资助项目(No.U22B6008，U2166204).
the National Natural Science Foundation of China (No.U22B6008，U2166204)

不计及跟网型装备动态作用下母线电压在扰动作用下抵抗偏离正常运行点的能力。例如：CIGRE 多馈入短路比(multi-infeed short-circuit ratio, MSCR)[12]-[13]、位置相关短路比(site-dependent SCR, SDSCR)[14]、多场站短路比(multi-renewable energy station SCR, MRSCR)[15]、等效短路比(equivalent circuit-based SCR，ESCR)[12]和带交互因子的短路比(the SCR with interaction factors, SCRIF)[5]等指标。上述指标可以反映装备接入前后母线电压稳态偏移量，但由于未考虑装备间及其与电网的宽频耦合特性，故与系统稳定性关联弱，用于反映稳定特性时缺乏机理支撑。

文献[7]、[16]-[18]从装备和电网动态交互视角重塑了融合装备和电网动态的系统强度内涵，并提出基于电压对电流（或电压对功率）灵敏度方程的电网广义短路比(generalized short-circuit ratio, gSCR)指标和装备/场站临界值指标，从理论上实现了系统强度与小扰动稳定性的关联。在同构系统（即接入装备的动态特性相似，具体定义见文献[7]）中，多电力电子装备馈入系统（简称“多馈入系统”）可解耦为装备动态整体保持的多个等效单馈入系统；基于等效单馈入系统，类比传统短路比的用途，定义了电网广义短路比和装备/场站临界短路比，并论证了装备/场站临界短路比等于广义短路比临界值的结论，从而实现了考虑装备动态特性的系统强度量化；在弱异构场景下，如外特性存在差异的直驱风机[6]、光伏[3]、构网型装备[10][11]和储能系统接入[19]或者装备在非额定运行点[20]等场景，异构装备动态可看作是同构系统中装备或网络动态的扰动，利用广义短路比和装备/场站临界短路比的一阶近似即可实现强度量化。上述广义短路比及其临界值的计算关键为求解能够近似原系统关键模态稳定性的解耦单馈入系统。然而，在这些非理想场景中，寻找等效解耦单馈入系统的理论和方法缺乏普适性，不利于广义短路比在复杂场景下的应用。

为此，本文旨在统一多种场景下广义短路比的导出原理及计算方法。首先，引入特征子系统的概念并提出其求解方法；其次，基于特征子系统提出广义短路比与装备/场站临界短路比的通用导出原理和计算方法；最后，算例验证了方法的有效性。

1 预备知识

1.1 矩阵的特征子空间与广义特征矩阵

$2n\times 2n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征子空间及广义特征矩阵定义如下：

定义 1[21]（特征子空间和广义特征矩阵）：记 $\Re(\boldsymbol{X})=\{\boldsymbol{Xu}:\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{C}^{2n}\}$ 和 $\Re(\boldsymbol{Y})=\{\boldsymbol{Yu}:\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{C}^{2n}\}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的右和左特征子空间，分别由 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 的列向量张成，归一化后满足 $\boldsymbol{Y}^H\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$; 与特征子空间对应，满足式(1)的 $\boldsymbol{L}$ 矩阵称之为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的“广义特征矩阵”，其中，广义特征矩阵的特征值也是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值。

$$\boldsymbol{MX} = \boldsymbol{XL},\ \boldsymbol{Y}^H\boldsymbol{M} = \boldsymbol{LY}^H \tag{1}$$

由上式(1)可知，$\boldsymbol{L}$ 可由下式求解得到：

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{Y}^H\boldsymbol{MX} \tag{2}$$

广义特征矩阵及特征子空间分别是特征值及特征向量的推广，满足：若($\boldsymbol{v}$，λ)是广义特征矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的特征对(式中 $\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 的右特征向量)，则($\boldsymbol{Xv}$，λ)为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征对。其中，特征值是维数为 1 的特殊广义特征矩阵，特征向量张成的空间是特征子空间的特例，对应 $\boldsymbol{L}$ 为对角矩阵。为方便理解及后文推导，下文举例说明。

假设矩阵 $\boldsymbol{M}$ 有一组特征子空间 $\Re(\boldsymbol{X}_i)$、$\Re(\boldsymbol{Y}_i)$ (i=1,…,n)，对应有 n 个 2 维广义特征矩阵 $\boldsymbol{L}_i$，表达式如式(3)所示，其中，$\boldsymbol{X}_i=(\boldsymbol{X}_{i1}, \boldsymbol{X}_{i2})$、$\boldsymbol{Y}_i=(\boldsymbol{Y}_{i1}, \boldsymbol{Y}_{i2})$，$\boldsymbol{X}_{i1}$、$\boldsymbol{X}_{i2}$、$\boldsymbol{Y}_{i1}$、$\boldsymbol{Y}_{i2}\in \mathbf{R}^{2n\times 1}$。根据特征子空间的定义可知，利用矩阵($\boldsymbol{X}_1$ … $\boldsymbol{X}_n$)和($\boldsymbol{Y}_1$ … $\boldsymbol{Y}_n$)可将 $\boldsymbol{M}$ 转换为块对角矩阵，且对角块为广义特征矩阵 $\boldsymbol{L}_i$，表示为：

$$(\boldsymbol{Y}_1 ... \boldsymbol{Y}_n)^H \boldsymbol{M} (\boldsymbol{X}_1 ... \boldsymbol{X}_n) = \mathrm{diag}(\boldsymbol{L}_i) \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{Y}_i^H\boldsymbol{MX}_i = \boldsymbol{L}_i$

由于($\boldsymbol{X}_1$ … $\boldsymbol{X}_n$)和($\boldsymbol{Y}_1$ … $\boldsymbol{Y}_n$)为特征子空间的基且列向量分别线性无关，故式(3)的矩阵变换不改变矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值，即矩阵 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{L}_i)$ 与 $\boldsymbol{M}$ 的特征值完全相同，其中 $\boldsymbol{L}_i$ 的特征值为 $\boldsymbol{M}$ 的部分特征值，$\boldsymbol{L}_i$ 可理解为 $\boldsymbol{M}$ 经过特征分解得到的 n 个解耦子矩阵。特别地，若 $\boldsymbol{M}$ 有 n 个 2 重特征值 λ_i(i=1,…,n)且存在两个线性无关的特征向量，那么其张成的空间为特征子空间，此时广义特征矩阵满足 $\boldsymbol{L}_i=\lambda_i\boldsymbol{I}_2$。

1.2 特征子空间摄动

考虑如下受扰矩阵：

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{E} \tag{4}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 所受扰动。

若扰动矩阵 $\boldsymbol{E}$ 足够小，$\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的特征子空间与 $\boldsymbol{M}$ 的特征子空间存在近似关系，如下引理。

引理 1[21]（特征子空间摄动）：记矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的右和左特征子空间左右分别为 $\Re(\boldsymbol{X})$ 和 $\Re(\boldsymbol{Y})$，那么 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的特征子空间 $\Re(\tilde{\boldsymbol{X}})$ 和 $\Re(\tilde{\boldsymbol{Y}})$ 以及广义特征矩阵 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 的近似满足：

$$\Re(\tilde{\boldsymbol{X}}) \approx \Re(\boldsymbol{X} + o(\|\boldsymbol{E}\|)), \Re(\tilde{\boldsymbol{Y}}) \approx \Re(\boldsymbol{Y} + o(\|\boldsymbol{E}\|)) \tag{5}$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \tilde{\boldsymbol{Y}}^H\tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Y}^H\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X} + o(\|\boldsymbol{E}\|^2) \tag{6}$$

其中，o(.)表示高阶无穷小，|| ||表示矩阵任意范数。

由引理 1 可知，$\boldsymbol{M}$ 的特征子空间可以近似 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的特征子空间。扰动越小，它们的特征子空间越接近。当 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的特征子空间计算非常复杂时，可构造合适的 $\boldsymbol{M}$ 简化 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的广义特征矩阵计算。附录 A 给出了两维矩阵的例子说明上述结论。

1.3 特征子系统

考虑 2n 维的动态系统 $\boldsymbol{A}$，记闭环传递函数矩阵和系统矩阵分别为 $\boldsymbol{T}^{-1}(s)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{T}(s)$，那么特征方程 $\det\left(\tilde{\boldsymbol{M}}\right)=0$ 决定了 $\boldsymbol{A}$ 的稳定性。根据定义 1 并类比式(3)可知，$\tilde{\boldsymbol{M}}$ 有一组特征子空间和多个低维广义特征矩阵 $\tilde{\boldsymbol{L}}_i$，且 $\tilde{\boldsymbol{L}}_i$ 的特征函数也是 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的特征函数。因此，广义特征矩阵 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ ($k\in\{1,\ldots,n\}$)的特征函数能够决定系统在某一关注模态下的稳定性。为利用低维的 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ 分析 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 矩阵的性质，引入了特征子系统的概念，具体为：

定义 2（系统矩阵和特征子系统）：设动态系统 $\boldsymbol{A}$，其系统闭环传递函数逆矩阵称之为该系统的系统矩阵，即 $\tilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{T}(s)$；记 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的第 k 个特征子空间和广义特征矩阵分别为 $\Re\left(\tilde{\boldsymbol{X}}_k\right)$、$\Re\left(\tilde{\boldsymbol{Y}}_k\right)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$（满足式(7)），系统矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ 的低维子系统称之为 $\boldsymbol{A}$ 的特征子系统。

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_k=\tilde{\boldsymbol{Y}}_k^H\tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{X}}_k, k\in\{1,\ldots,n\} \tag{7}$$

2 系统建模及问题描述

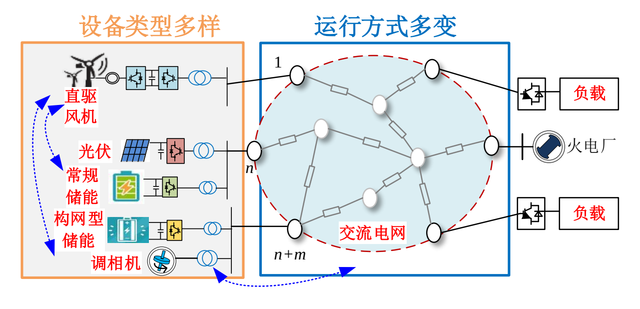


图 1 多类型新能源馈入电力系统

Fig.1 The new power system with multiple types of renewable energy devices integrated

考虑图 1 所示新型电力系统，包含 n+m 台装备及接入的母线，r 个中间无源母线和 1 个无穷大母线（若有构网装备，无穷大母线可以没有），其中，n 台装备是新能源或储能的跟网型变流器；m 台是构网型装备，如构网型风机、储能或调相机等。

2.1 系统动态建模

在全局 xy 坐标系下，建立图 1 所示系统的线性化模型，得到系统的闭环特征方程。

首先，考虑所有线路阻抗比相同，从装备端口往交流电网看，在全局同步坐标系下的电网端口电压微增量 $\Delta\boldsymbol{U}_{xy}(s)$ 和电流微增量 $\Delta\boldsymbol{I}_{xy}(s)$ 的灵敏度方程可表示为[16]：

$$-\Delta\boldsymbol{I}_{xy}=\underbrace{\left(\boldsymbol{B}\otimes\zeta(s)\right)}_{\boldsymbol{Y}_{net}(s)}\Delta\boldsymbol{U}_{xy} \tag{8}$$

式中：
$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1(n+m+r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{(n+m+r)1} & \cdots & B_{(n+m+r)(n+m+r)} \end{bmatrix}$$

$$\zeta(s)=\frac{\sqrt{\tau^2+1}}{s^2/(\omega_0+\tau)^2+1}\begin{bmatrix} s/(\omega_0+\tau) & 1 \\ -1 & s/(\omega_0+\tau) \end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{B}$ 为包含所有节点的等效导纳矩阵或灵敏度矩阵；$\tau=R/X$ 为线路阻抗比；Δ表示变量的增量；⊗表示 Kronecker 积；ω_0 为交流电网的同步转速。当网络侧包含电力电子无功补偿、构网型装备或负荷等元件时，修改交流网络端口电压对电流的灵敏度矩阵即可考虑这些元件带来的影响，后续强度量化方法仍然适用，限于篇幅不再详细展开。

其次，装备端口的电压微增量 $\Delta\boldsymbol{U}_{xy}(s)$ 和电流微增量 $\Delta\boldsymbol{I}_{xy}(s)$ 的灵敏度方程可表示为[16]：

$$\Delta\boldsymbol{I}_{xy}=\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{IBR1}(s) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{Y}_{IBR(n+m)}(s) & \\ & & & \boldsymbol{0}_{2r} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Y}_{IBR}(s)}\Delta\boldsymbol{U}_{xy} \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{Y}_{IBR1}(s)\sim\boldsymbol{Y}_{IBR(n+m)}(s)$ 分别为 $n+m$ 台装备的导纳传递函数矩阵；$\boldsymbol{0}_{2r}\in\mathbf{R}^{2r\times2r}$，元素均为 0。

最后，结合式(8)和(9)，利用如下行列式可表示图 1 所示系统的闭环特征方程：

$$\det\left(\boldsymbol{T}_{het}(s)\right)=\det\left(\boldsymbol{Y}_{IBR}(s)+\boldsymbol{Y}_{net}(s)\right)=0 \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{T}_{het}(s)$ 为原系统的闭环传递函数逆矩阵，即原系统矩阵，det(.)表示求行列式。

2.2 基于广义短路比的系统强度量化思路回顾

式(10)所示闭环特征方程决定了系统稳定性，然而，由于 $\boldsymbol{T}_{het}(s)$ 维数较高，故寻找近似的低维系统以简化分析。

对于同构系统，将多馈入系统解耦为多个等效单馈入系统。基于失稳风险最高的等效单馈入系统，类比传统短路比定义，可给出原系统的广义短路比 gSCR 与装备/场站临界短路比 $\mathrm{SCR_0}$，并形成基于广义短路比的系统强度分析方法，而且具有电网动态与装备动态分离的特点。计算公式如下式所示[7]。

$$gSCR\geq CgSCR_0=SCR_0 \tag{11}$$

或
$$\beta\%\triangleq\frac{gSCR-SCR_0}{SCR_0}\times100\%\geq\beta_0\% \tag{12}$$

其中，$CgSCR_0$为广义短路比临界值；β_0%是为了保证系统具有足够的裕度而设置的阈值；gSCR 的表达式为：

$$gSCR \triangleq \lambda_{\min}\left(\boldsymbol{S}_{B(n+m)}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}_{red}\boldsymbol{S}_{B(n+m)}^{-\frac{1}{2}}\right)=\bar{\sigma}^{-1}\left(\boldsymbol{S}_{B(n+m)}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Z}_{red}\boldsymbol{S}_{B(n+m)}^{\frac{1}{2}}\right) \quad (13)$$

式中：$\boldsymbol{S}_{B(n+m)}$=diag($S_{B1,\dots,}S_{B(n+m)}$)，diag(·)表示对角矩阵，$S_{B1,\dots,}S_{B(n+m)}$分别为 $n+m$ 台装备的额定容量；$\boldsymbol{B}_{red}$ 为保留装备母线的网络导纳矩阵或电压电流灵敏度矩阵；$\boldsymbol{Z}_{red}=\boldsymbol{B}_{red}^{-1}$；$\bar{\sigma}(\cdot)$和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示求解矩阵的最大奇异值和最小特征值。

广义短路比是灵敏度矩阵的最大奇异值，反映了多端口交流网络中电压扰动对电流扰动的最大灵敏度[7]。

对于异构系统，利用矩阵摄动理论对 gSCR 和 SCR_0 进行近似即可。具体地，根据摄动来源以及装备和电网动态特性分为两类：1）跟网装备动态：跟网型变流器外特性存在差异，认为对同构系统装备动态存在摄动，此时计算 gSCR 的边界条件不变，而 SCR_0 取决于装备动态特性的加权平均，具体见文献[7][17][19][20]；2）等效交流网络动态：当考虑构网型变流器或调相机等电压源特性占优的接入装备，可认为是对网络修正，此时 SCR_0 的计算方法不变，而修正 gSCR 的计算边界条件即可计及这些构网装备的影响，具体见文献[9][10][11]。

2.3 拟解决的问题

综上所述，gSCR 指标及其临界值的定义和计算，其关键步骤是寻找等效的低维单馈入系统，即特征子系统。然而，现有研究仅适用于单一典型场景下的问题，如仅考虑外特性异构的跟网型变流器[6]、构网型装备[10][11]或储能系统[19]等装备接入的场景，其方法及理论缺乏普适性，导致对广义短路比的理解相对复杂。为此，本文利用更具物理意义的特征子系统概念，统一广义短路比的导出原理及计算方法，主要讨论两个问题：

问题 1：近似原大规模系统模态的低维解耦子系统（即特征子系统）的理论基础。

问题 2：基于特征子系统，广义短路比及其临界值的统一导出原理及计算方法。

3 特征子系统及其近似方法

结合定义 2 可知，对给定动态系统及其系统矩阵，存在低维特征子系统与广义特征矩阵。其中，特征子系统可近似原动态系统在关注模态下的稳定性，且维数更低，分析更简单。

上述分析思路的关键是获得特征子系统，即求解广义特征矩阵。为此，本节首先利用矩阵的舒尔补变换简化原系统矩阵；其次，基于引理 1 获得系统矩阵的近似特征子空间，并得到对应的广义特征矩阵及低维特征子系统。

3.1 系统矩阵及其简化

考虑图 1 所示电力系统，下文从小扰动同步视角给出其特征子系统的近似求解方法，其余模态下的特征子系统求解方法类似。

将系统看成由两部分组成，一部分为等效网络，包含交流网络与 m 台构网装备的等效导纳（在分析频段内的外特性由戴维南等效电路主导，其等效导纳为 B_{IBRj}（j=1,…,m））；另一部分包含 n 台跟网装备动态模型。式(10)所示的原系统矩阵可变换为：

$$\boldsymbol{T}_{het}^{(1)}(s)=\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(1)}(s)+\boldsymbol{Y}_{net}^{(1)}(s) \quad (14)$$

式中：$\boldsymbol{Y}_{net}^{(1)}(s)=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_{IBR})\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)$

$$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(1)}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{IBR1}(s) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{Y}_{IBRn}(s) & \\ & & & \boldsymbol{0}_{2(m+r)}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{IBR}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_n & & \\ & diag(B_{IBRj}) & \\ & & \boldsymbol{0}_r\end{bmatrix},\boldsymbol{T}_{het}^{(1)}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_1(s) & \boldsymbol{T}_2(s)\\ \boldsymbol{T}_3(s) & \boldsymbol{T}_4(s)\end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{B}_{IBR}$ 为 m 台构网型装备对网络灵敏度矩阵的修正；$\boldsymbol{T}_1(s)$、$\boldsymbol{T}_2(s)$、$\boldsymbol{T}_3(s)$和 $\boldsymbol{T}_4(s)$为具有合适维的子矩阵；$\boldsymbol{I}_2$ 为 2 维单位矩阵；$\boldsymbol{0}_n$，$\boldsymbol{0}_r$ 分别为 n、r 维零矩阵。

假设未接装备时电网是稳定的，则根据 Schur 定理[22]，det($\boldsymbol{T}^{(1)}_{het}(s)$)=0 的零点由 det($\boldsymbol{T}_1(s)$- $\boldsymbol{T}_2(s)\boldsymbol{T}_4^{-1}(s)\boldsymbol{T}_3(s)$) =0 决定，故 det($\boldsymbol{T}^{(2)}_{het}(s)$)=0 决定了图 1 所示系统的稳定性，其中(推导见附录 B)：

$$\begin{aligned}&\det\left(\boldsymbol{T}_1(s)-\boldsymbol{T}_2(s)\boldsymbol{T}_4^{-1}(s)\boldsymbol{T}_3(s)\right)=\det\left(\boldsymbol{T}_{het}^{(2)}(s)\right)\\&=\det\left(\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)+\boldsymbol{Y}_{net}^{(2)}(s)\right)=0\end{aligned} \quad (15)$$

式中：

$$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{IBR1}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{Y}_{IBRn}(s)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_{net}^{(2)}(s)=\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_{IBR}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{bmatrix},\boldsymbol{B}'_{red}=\left(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_4^{-1}\boldsymbol{B}_3\right)$$

其中，$\boldsymbol{B}_1\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}_2\in\mathbf{R}^{n\times(m+r)}$，$\boldsymbol{B}_3\in\mathbf{R}^{(m+r)\times n}$，$\boldsymbol{B}_4\in\mathbf{R}^{(m+r)\times(m+r)}$。

进一步考虑运行点的影响，将剩余 n 台跟网型装备实际工况与其动态解耦[20]。具体地，用包含装备实际工况信息的矩阵$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\otimes\boldsymbol{I}_2$ 左乘 $\boldsymbol{T}^{(2)}_{het}(s)$，$\boldsymbol{T}^{(2)}_{het}(s)$可转化为如下所示的 $\boldsymbol{T}^{(3)}_{het}(s)$。令 $\tilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{T}^{(3)}_{het}(s)$，$\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的特征函数决定了图 1 系统的稳定性。

$$\det\left(\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\otimes\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{T}_{het}^{(2)}(s)\right)=\det\left(\boldsymbol{T}_{het}^{(3)}(s)\right)=\det\left(\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(3)}(s)+\boldsymbol{Y}_{net}^{(3)}(s)\right)=0 \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{Y}_{net}^{(3)}(s)=\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)$

$$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(3)}(s)=\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\otimes\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)=diag\left(\frac{U_i^2}{P_i}\boldsymbol{Y}_{IBRi}(s)\right)$$

其中，$\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$= diag($U_i^2/P_i$)，$U_i$、$P_i$ 分别为装备 i 的端口电压、输出有功功率，当考虑装备的功率反向时，有功功率为负。

注 1：当装备在额定运行点，其端口电压为 1.0 p.u.，输出有功功率等于其额定容量 S_{Ni} (i=1,…,n)，此时 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$= diag($U_i^2/P_i$) =diag($S_{Ni}^{-1}$)=$\boldsymbol{S}_{Nn}^{-1}$，故额定运行点的分析方法是实际工况下的特例。

3.2 特征子系统近似方法

当 n 台等效装备动态模型同构时，等效导纳矩阵$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2$ 关于自身二重特征值的特征子空间为 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的一组特征子空间。其中，当系统中有 $q(q<n)$台装备有功功率反向（为负值）时，$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2$ 有 q 个负特征值[19]，将特征值排序为 $\lambda_{-q}\le\ldots\le\lambda_{-1}\le0\le\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_{n-q}$，$\lambda_1$ 为最小正特征值；$\Re\left(\boldsymbol{X}_j\right)$、$\Re\left(\boldsymbol{Y}_j\right)$ (j= -q,…,-1,1,…,n-q)为$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2$ 与特征值 λ_j 对应的特征子空间。进一步，根据定义 1 和 2 并类比式(3)，利用 $\Re\left(\boldsymbol{X}_k\right)$ 和 $\Re\left(\boldsymbol{Y}_k\right)$ ($k\in$ {-q,…,-1,1,…,n-q})可求解原系统的多个特征子系统，分别近似原系统不同模态下的稳定性，总结为如下引理 2，其具体证明见附录 C。

引理 2：广义特征矩阵 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ 满足：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_k=\boldsymbol{Y}_k^H\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{Y}_{IBReq}(s)+\lambda_k\cdot\boldsymbol{\zeta}(s) \tag{17}$$

式中：$\tilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{Y}_{IBReq}(s)+\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)$

其中，$\boldsymbol{Y}_{IBReq}(s)$为相似的单台等效装备动态模型；$\boldsymbol{X}_k$= $\boldsymbol{x}_k\otimes\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{Y}_k$= $\boldsymbol{y}_k\otimes\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{X}_k$、$\boldsymbol{Y}_k$ 的列向量分别为$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2$ 关于 λ_k 的右、左特征向量，$\boldsymbol{x}_k$、$\boldsymbol{y}_k\in\mathbf{R}^{n\times1}$，$\boldsymbol{x}_k$、$\boldsymbol{y}_k$ 分别为$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}'_{red}$ 关于 λ_k 的右、左特征向量。

当装备动态模型存在差异时，构造等效同构系统，其系统矩阵的特征子空间可近似原系统矩阵的特征子空间，再由引理 1 可得广义特征矩阵 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ 的近似。具体地，首先利用 $\Re\left(\boldsymbol{X}_k\right)$ 和 $\Re\left(\boldsymbol{Y}_k\right)$ 构造等效同构系统矩阵 $\boldsymbol{M}_k$ 为：

$$\boldsymbol{M}_k=\boldsymbol{T}_{hom_k}(s)=\boldsymbol{Y}_{IBR_k}(s)+\boldsymbol{Y}_{net_hom}(s) \tag{18}$$

式中：$\boldsymbol{Y}_{net_hom}(s)=\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)$

$$\boldsymbol{Y}_{IBR_k}(s)=\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G}_k(s)$$

$$\boldsymbol{G}_k(s)=\boldsymbol{Y}_k^H\left[diag\left(\left(U_i^2/P_i\right)\boldsymbol{Y}_{IBRi}(s)\right)\right]\boldsymbol{X}_k=\sum_{i=1}^{n}p_{ki}\left(U_i^2/P_i\right)\boldsymbol{Y}_{IBRi}(s),\ p_{ki}=x_{ki}y_{ki}$$

其中，$\boldsymbol{T}_{hom_k}(s)$为对应 λ_k 的等效同构系统矩阵；$\boldsymbol{G}_k(s)$为等效加权装备模型；p_{ki} 为第 i 台装备参与因子，x_{ki}、y_{ki} 分别为 $\boldsymbol{x}_k$、$\boldsymbol{y}_k$ 的第 i 个元素。

其次，观察构造的同构系统 $\boldsymbol{M}_k$ 中，装备动态是原系统中所有接入跟网型装备动态的加权。再根据引理 1 和 2 可知，$\Re\left(\boldsymbol{X}_k\right)$ 和 $\Re\left(\boldsymbol{Y}_k\right)$ 仍然是 $\boldsymbol{M}_k$ 的特征子空间，利用该组特征子空间可求解 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的广义特征矩阵 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$，表示为：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_k\approx\boldsymbol{Y}_k^H\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{G}_k(s)+\lambda_k\cdot\boldsymbol{\zeta}(s) \tag{19}$$

式中：$\lambda_k\cdot\boldsymbol{\zeta}(s)=\boldsymbol{Y}_k^H\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)\right)\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{y}_k^H\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\boldsymbol{x}_k\cdot\boldsymbol{\zeta}(s)$

最后，将 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ 看作一低维系统的系统矩阵，那么该低维系统是原系统的一个特征子系统，可近似原系统在对应模态下的稳定性（由于 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ 保留了原系统矩阵的零极点，故还能反映原系统的鲁棒性）。该结论总结为定理 1，具体证明见附录。

定理 1：将原系统矩阵 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 看作同构系统矩阵 $\boldsymbol{M}_k$ 的摄动，$\boldsymbol{M}_k$ 的特征子空间与 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的特征子空间近似相等，且 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的广义特征矩阵 $\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ 可由式(19)计算。

上述得到的特征子系统维数较低，并能够近似反映原系统在对应模态下的特性。因此，基于特征子系统简化了复杂系统的分析。

注 2：当跟网装备动态模型同构，等效同构系统矩阵与原系统矩阵的特征子空间完全相同，特征子系统稳定性与原系统相同；反之，等效同构系统矩阵与原系统矩阵间存在差异，广义特征矩阵的近似与真实广义特征矩阵存在偏差，此时特征子系统近似反映了系统稳定性和鲁棒性。

3.3 特征子系统的物理意义

根据上节可知，利用特征子空间摄动可求解原系统矩阵的广义特征矩阵，对应的特征子系统可用于分析原系统稳定性；物理上看，特征子系统是一个包含装备与网络动态的低维单馈入系统，本质是原系统在模态坐标系下的一个解耦子系统。特征子系统的物理意义及求解过程可用图 2 和图 3 总结。

由式(19)与图 2 可知，特征子系统为单机无穷大系统，由跟网型等效加权装备与等效线路构成。其中，接入装备的特性为原系统中跟网型装备的加权平均，反映系统中装备动态的整体特性；等效线

路动态计及了构网装备等效导纳等因素对网络动态的影响。进一步，从传统短路比看，特征子系统的短路比取值为对应等效线路导纳，其大小为特征值 λ_k 的绝对值，可用于表征特征子系统的电网强度。

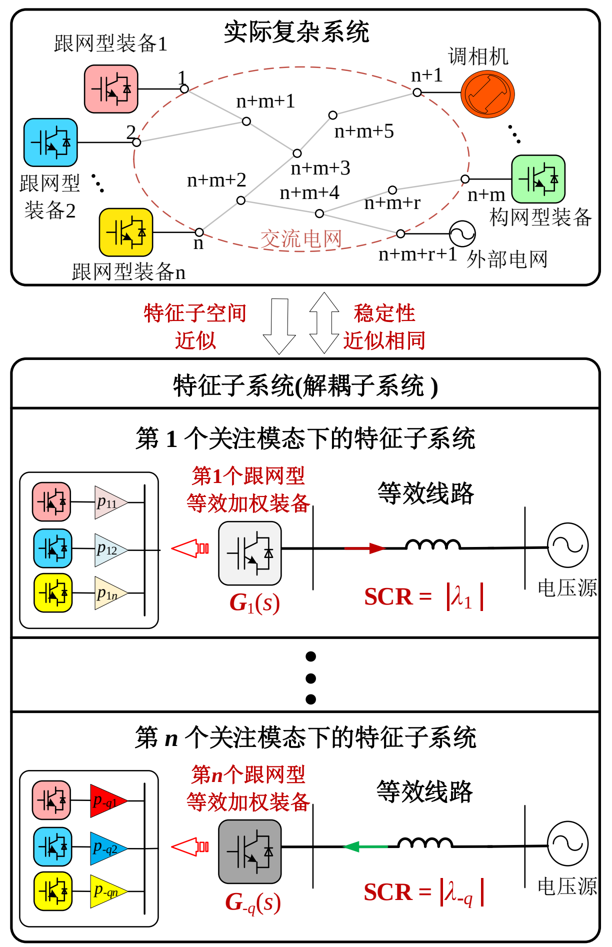


图 2 特征子系统物理意义示意图

Fig.2 The schematic diagram of physical significance of eigen-subsystem.

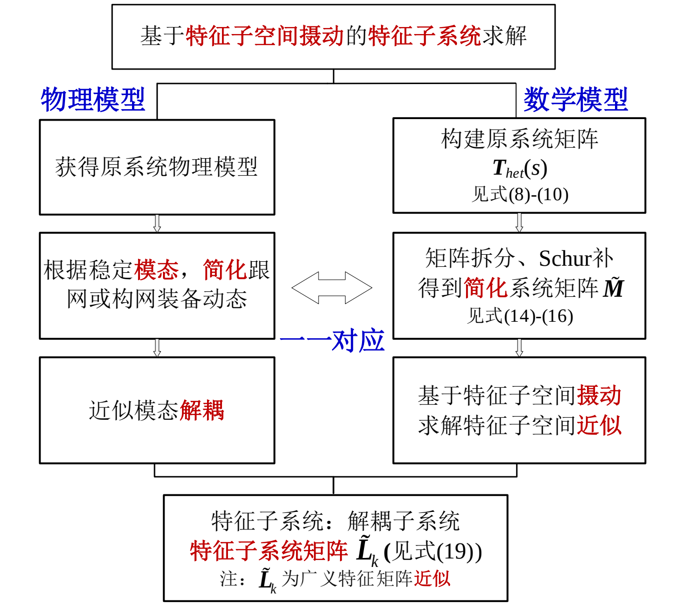


图 3 特征子系统求解方法示意图

Fig.3 The schematic diagram of the calculation method of eigen-subsystem.

还值得注意的是，由于不同模态的稳定机理不同，其对应的特征子空间及特征子系统应不同，对应 k 取值不同。因此，实际问题中需根据具体模态及稳定机理，选择相应的特征子系统，实现复杂系统的简化分析。此外，由于本文聚焦跟网型装备的主导模态并将构网装备等效为对地支路，对应特征子系统仅为跟网型装备的单机无穷大系统；然而，在其余模态下，对应特征子系统形式更为复杂，包括但不限于单机无穷大系统。

4　基于特征子系统的广义短路比导出原理及强度量化方法

本节提出了基于特征子系统的广义短路比统一导出原理，并给出了相应流程和几种典型场景下的计算方法。

4.1　特征子系统中的电网强度和广义短路比指标

根据 3.3 节可知，特征子系统可近似表征原系统的稳定性，并由等效加权装备动态与等效线路动态构成，电网短路比大小为特征值 λ_k 的绝对值。因此，原系统强度取决于特征子系统动态，当等效加权装备动态一定时，原系统强度取决于特征子系统的短路比，即等效线路导纳。

当电网电压支撑强度低时，静态电压稳定及由锁相环带来的小扰动失稳风险较高，故这两类稳定问题所对应的特征子系统（即 k=1）备受关注。具体地，在该模态下，短路比越小，系统失稳风险越高[7]；那么对应短路比为 λ_1(对应 k=1)的特征子系统最易发生失稳，该短路比被定义为“广义短路比”，如式(20)所示。因此，广义短路比仅是基于特征子系统的一个具体应用，其余重要的特征子系统，也能够反映原系统在其余模态下的特性，而且都能提出对应的指标。然而，一般来说，基于短路比的分析方法适用于静稳及小扰动同步等模态对应的特征子系统，其特点是这类问题与电网电气距离强相关。至于稳定机理为 LC 谐振的高频振荡对应的特征子系统，基于短路比的分析方法可能不再适用，具体见文献[7]的讨论。

$$
\begin{aligned}
gSCR &= \boldsymbol{y}_1^H\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\boldsymbol{x}_1=\lambda_{\min}^{+}\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\right)\\
&=\lambda_{\min}^{+}\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}'_{red}\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (20)\\
&=\bar{\sigma}^{-1}\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Z}'_{red}\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

其中，$\lambda_{\min}^{+}(\cdot)$ 表示求矩阵的最小正特征值，$\boldsymbol{Z}'_{red}$=

$\boldsymbol{B'}_{red}^{-1}$。

此外，由式(20)可知，广义短路比既可以通过矩阵特征值定义，也能通过闭环系统的特征向量得到。当闭环系统的特征子空间与开环系统（即仅考虑电网导纳矩阵）的特征子空间相同时，如同构系统中，两者结论一致；反之，基于特征值的定义仍然是一种误差较小且便于实际操作的计算方法。

再者，结合式(19)和(20)还可知，当等效加权装备/场站动态一定时，根据广义短路比与系统强度的正相关性，能够确定等效加权装备/场站在达到临界稳定状态或给定性能要求所需的最小短路比 (简称“等效加权装备/场站临界短路比 SCR_0”)。SCR_0 可反映装备/场站动态对电网强度的耐受能力，恰恰就是广义短路比临界值 $CgSCR_0$ ，表示为：

$$SCR_0 = \underset{gSCR}{\arg}\left\{\det\left(\boldsymbol{G}_1\left(s_d\right) + gSCR\cdot\boldsymbol{\zeta}\left(s_d\right)\right) = 0\right\} \quad (21)$$

其中，arg{}表示求方程的根；s_d 为等效加权装备在给定性能要求下解得系统主导特征根。

综上，复杂系统的广义短路比统一导出过程为：1) 利用等效同构系统特征子空间，求解原系统矩阵近似的广义特征矩阵，获得能够近似原系统动态特性的特征子系统；2) 基于特定的特征子系统，计算其短路比指标（即广义短路比）及装备/场站临界值（等于广义短路比临界值），进而形成融合电网广义短路比与装备/场站临界短路比的量化方法。其中，广义短路比仅与等效网络动态和接入装备的容量有关、临界值仅与等效加权装备/场站的动态有关，故广义短路比方法保留了传统短路比方法所具有的网络动态与装备动态分离量化的优势。

4.2 典型场景下广义短路比计算方法

结合 3.1 节中系统矩阵的简化方法、公式(见式(15)-(16))以及 4.1 节中广义短路比的计算公式（见(20))，本节给出三种典型场景中系统矩阵的具体形式，由此实现广义短路比的计算。

4.2.1 考虑装备在非额定运行点的广义运行短路比

考虑图 1 所示系统仅包含 n 台采用不同控制策略、参数的新能源变流器，m=0。其中，新能源变流器在不同的非额定运行点，输出有功功率及端口电压分别为 0.2~1p.u.和 0.9~1.1p.u.不等[23]。根据式(15)-(16)、(20)，即可求得该场景下简化后的系统矩阵及广义短路比。具体过程为：

首先，考虑无构网装备等效导纳对网络动态的修正，即 $\boldsymbol{B}_{IBR}=\boldsymbol{0}_{n+r}$，将 $\boldsymbol{B}_{IBR}=\boldsymbol{0}_{n+r}$ 代入式(15)并令 m=0，可求得仅包含 n 台装备接入母线的网络等效导纳矩阵 $\boldsymbol{B'}_{red}$；其次，考虑将 n 台装备的实际工况与其动态解耦，$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)$ 与 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$ 如式(22)所示；最终，将 $\boldsymbol{B'}_{red}$、$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)$ 与 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$ 分别代入式(16)、(20)，可求得该场景下的系统矩阵与广义短路比。

$$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s) = diag\left(\boldsymbol{Y}_{VSCi}(s)\right), \boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P} = diag\left(U_i^2/P_i\right) \quad (22)$$

其中，$\boldsymbol{Y}_{VSCi}(s)$为第 i 台新能源变流器导纳传递函数矩阵，i=1,…,n； U_i、P_i 分别为装备 i 的端口电压、输出有功功率。

4.2.2 考虑装备有功功率反向的广义短路比

根据装备的物理特性与系统需求，部分装备可反向从电网吸收功率，如储能系统与柔性直流输电等。不失一般性地，以常规储能系统为例，考虑图 1 所示系统包含 n 台采用不同控制策略、参数的新能源变流器，m 台常规储能系统。其中，装备均运行在额定工况；新能源变流器主要向电网发出有功功率，储能变流器主要向电网发出(放电)或吸收有功 (充电)。根据式(15)-(16)、(20)，即可求得该场景下简化后的系统矩阵及广义短路比。具体过程为：

首先，考虑无构网装备等效导纳对网络动态的修正，即 $\boldsymbol{B}_{IBR}=\boldsymbol{0}_{n+m+r}$，将 $\boldsymbol{B}_{IBR}=\boldsymbol{0}_{n+m+r}$ 代入式(15)，可求得仅包含 $n+m$ 台装备接入母线的网络等效导纳矩阵 $\boldsymbol{B'}_{red}$；其次，考虑将 $n+m$ 台装备的额定容量与其动态解耦，其中，当储能变流器充电，其额定容量需加上负号，例如，考虑 m 台储能均工作在充电状态，$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)$ 与 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$ 如式(23)所示；最终，将 $\boldsymbol{B'}_{red}$、$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)$ 与 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$ 分别代入式(16)、(20)，可求得该场景下的系统矩阵与广义短路比。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} diag\left(\boldsymbol{Y}_{VSCi}(s)\right) & \\ & diag\left(\boldsymbol{Y}_{PCSj}(s)\right) \end{bmatrix} \\
&\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}_{N(n+m)}^{-1} = \begin{bmatrix} diag\left(S_{Ni}^{-1}\right) & \\ & -diag\left(S_{N(n+j)}^{-1}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (23)$$

其中，$\boldsymbol{Y}_{PCSj}(s)$为第 j 台储能变流器的导纳传递函数矩阵，j=1,…,m； S_{Ni}、 $S_{N(n+j)}$分别为第 i 台新能源变流器及第 j 台储能变流器的额定容量。

4.2.3 考虑构网型装备影响的广义短路比

考虑图 1 所示系统包含 n 台采用不同控制策略、参数的新能源变流器，m 台构网型储能系统或调相机。其中，装备均运行在额定工况；调相机和外特性近似为电压源且惯量系数较大的构网型变流器能够为系统提供电压支撑能力，在锁相环主导的小扰动同步稳定问题中能够等效为含内电抗的电压源。根据式(15)-(16)、(20)，即可求得该场景下简化后的系统矩阵及广义短路比。具体过程为：

首先，考虑 m 台构网装备等效导纳对网络动态的修正，即 $\boldsymbol{B}_{IBR}$= diag($\boldsymbol{0}_n$ diag(B_{IBRj}) $\boldsymbol{0}_r$)，将其代入式(15)，可求得仅包含 n 台装备接入母线的网络等效导纳矩阵 $\boldsymbol{B'}_{red}$；其次，考虑将 n 台装备的额定容

量与其动态解耦，$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)$与$\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$如式(24)所示；最终，将$\boldsymbol{B'}_{red}$、$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)$与$\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$分别代入式(16)、(20)，可求得该场景下的系统矩阵与广义短路比。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)&=diag\left(\boldsymbol{Y}_{VSCi}(s)\right)\\ \boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{S}_{Nn}^{-1}=diag\left(S_{Ni}^{-1}\right)\end{aligned}\tag{24}$$

其中，B_{IBRj}为第j台构网型变流器或调相机的等效导纳，j=1,…,m，B_{IBRj}=diag($S_{VSMj}B_p$或$1/x_{dj}$”)，x_{dj}”为第j台调相机的等效内电抗，即次暂态电抗，$1/S_{VSMj}B_p$为第j台构网型变流器的等效内电抗，S_{VSMj}为第j台构网型变流器的额定容量，B_p为单位容量下构网型变流器的等效导纳。

为直观对比上述3种典型场景下原系统矩阵的构成，表1总结了上述公式。此外，表1还给出了上述场景对系统强度的作用机理，详细讨论可分别参考文献[9][10][11][19][20]。

表 1 典型场景下原系统矩阵构成及其对系统强度的作用机理

Tab.1 The elements required for calculation of system strength and their physical significance under typical scenarios

<table>
<tr><td rowspan="4">典型场景</td><td colspan="4">原系统矩阵 $\tilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(3)}(s)+\boldsymbol{Y}_{net}^{(3)}(s)$</td><td rowspan="4">影响机理</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(3)}(s)=\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\otimes\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{Y}_{net}^{(3)}(s)=\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\zeta(s)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{Y}^{(2)}_{IBR}(s)$</td><td rowspan="2">$\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{B'}_{red}$：$\boldsymbol{B}$+$\boldsymbol{B}_{IBR}$降阶至$\boldsymbol{Y}^{(2)}_{IBR}(s)$端口的网络等效导纳矩阵</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{B}$</td><td>构网装备等效导纳$\boldsymbol{B}_{IBR}$</td></tr>
<tr><td>非额定运行点</td><td>diag($\boldsymbol{Y}_{VSCi}(s)$)</td><td>diag(U_i^2/P_i)</td><td rowspan="3">包含所有装备及中间节点的网络导纳矩阵</td><td>$\boldsymbol{0}_{n+r}$</td><td rowspan="3">改变 gSCR 或 SCR_0</td></tr>
<tr><td>有功功率反向</td><td>diag($\boldsymbol{Y}_{VSCi}(s)$ $\boldsymbol{Y}_{PCSj}(s)$)</td><td>$\boldsymbol{S}_{N(n+m)}^{-1}$</td><td>$\boldsymbol{0}_{n+m+r}$</td></tr>
<tr><td>构网型装备</td><td>diag($\boldsymbol{Y}_{VSCi}(s)$)</td><td>$\boldsymbol{S}_{Nn}^{-1}$</td><td>diag($\boldsymbol{0}_n$ diag(B_{IBRj}) $\boldsymbol{0}_r$)</td></tr>
</table>

4.3　系统强度量化步骤

为方便实际应用，本节给出基于广义短路比的系统强度量化步骤，具体如下：

1）根据装备物理特性将装备动态分别看作跟网型装备动态或对网络动态的修正；

2）根据网络参数与装备特点，基于式(15)得到等效网络动态$\boldsymbol{B}$+$\boldsymbol{B}_{IBR}$；根据实际工况、装备数和$\boldsymbol{B}$+$\boldsymbol{B}_{IBR}$，基于式(15)获得等效导纳矩阵($\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$)$\boldsymbol{B'}_{red}$；

3）根据式(20)，求解等效导纳或灵敏度矩阵的特征值或奇异值，即广义短路比；

4）根据式(21)或(25)求解SCR_0。具体地，前者可通过解析计算或仿真测试等方式获得[7]，得到的SCR_0精度较高；后者则需结合实际工程经验，利用参与因子(见式(18))计算获得。

$$SCR_0=\sum_{i=1}^{n}p_{1i}SCR_{0_i}\tag{25}$$

式中，SCR_{0_i}为第i台装备达到临界稳定所需的最小短路比。

5）根据式(12)求解β%，量化强度。

值得注意的是，当系统为黑箱模型时，等效网络动态与实际工况矩阵可通过扰动辨识方法[24]与PMU量测等方法获得数据。

综上所述，通过引入特征子系统，统一了多种场景下广义短路比及临界值的导出原理及计算方法，具有优势为：1）保留物理特性。特征子系统保留了装备与网络的动态特性；2）方法通用且拓展性好。不仅适用于异构多馈入系统的复杂场景，而且有潜力推广应用到除小扰动同步稳定和静态电压稳定外的其它稳定问题。

5 算例分析及验证

首先基于4馈入系统验证特征子系统求解方法及其在描述原系统稳定性的有效性；其次，利用某实际新能源基地的电磁暂态模型，验证广义短路比指标在新型电力系统中的有效性，并分析装备在非额定运行点、有功功率反向和包含构网型装备对指标计算与系统强度的影响规律。

5.1　特征子系统及其求解方法的有效性

为验证特征子系统在描述原系统稳定性的有效性，搭建4馈入系统电磁暂态仿真模型，拓扑如图4所示。其中节点1、4为常规、构网型储能系统接入节点，节点2、3为新能源变流器接入节点，装备控制策略、参数及网络参数如附表E1-E3所示。

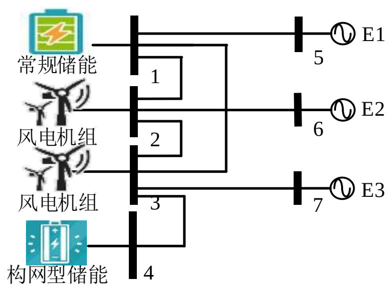


图 4 4馈入系统

Fig.4 The topology of a four-converter system

具体地，考虑等比例增大附表E3所示所有线路电感，比例参数k=1、1.5、2、3、4，其中，常规储能变流器从电网吸收功率，构网型变流器向电网发出功率，装备实际工况如表2所示。以此为基础，

首先，分别基于特征子空间摄动理论求解特征子系统；其次，对比原始 4 馈入系统和特征子系统的主导特征根，验证特征子系统的有效性。

首先，以算例 1 为例，给出特征子系统的具体求解过程。具体步骤为：构建系统矩阵，考虑构网型变流器对网络的修正；将系统矩阵降阶，并用 $(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\otimes\boldsymbol{I}_2$ 左乘矩阵；最终系统矩阵变换为：

$$\det\left(\boldsymbol{T}_{het}^{(3)}(s)\right)=\det\left(\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(3)}(s)+\boldsymbol{Y}_{net}^{(3)}(s)\right)=0 \qquad (26)$$

式中：$\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}=\begin{bmatrix}-55 & 14 & 14\\ -2 & 7 & -2\\ -4 & -4 & 16\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(3)}(s)=diag\left(\frac{U_1^2}{P_1}\boldsymbol{Y}_{PCS}(s)\ \ \frac{U_2^2}{P_2}\boldsymbol{Y}_{VSC1}(s)\ \ \frac{U_3^2}{P_3}\boldsymbol{Y}_{VSC2}(s)\right)$$

式中，$\boldsymbol{Y}_{VSC1}(s)$、$\boldsymbol{Y}_{VSC2}(s)$、$\boldsymbol{Y}_{PCS}(s)$分别为新能源变流器与常规储能变流器的导纳传递函数矩阵；$\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$ =diag(U_1^2/P_1 U_2^2/P_2 U_3^2/P_3)。

矩阵$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\,\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2$有三个二重特征值$\lambda_1$=5.19、$\lambda_2$=17.10、$\lambda_{-1}$=-53.62，特征子空间$\Re\left(\boldsymbol{X}_j\right)$、$\Re\left(\boldsymbol{Y}_j\right)$ (j=-1,1,2)满足下式，其中 $\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{x}_j\otimes\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{Y}_j=\boldsymbol{y}_j\otimes\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{x}_j$、$\boldsymbol{y}_j$ 分别为$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\,\boldsymbol{B}'_{red}$关于 λ_j 的右、左特征向量。

$$\boldsymbol{Y}_j^H\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{X}_j=\lambda_j\otimes\boldsymbol{I}_2 \qquad (27)$$

将系统矩阵解耦为三个广义特征矩阵，即三个特征子系统的系统矩阵，表示为：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_j\approx\boldsymbol{Y}_j^H\boldsymbol{T}_{het}^{(3)}(s)\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{G}_j(s)+\lambda_j\cdot\boldsymbol{\zeta}(s) \qquad (28)$$

式中：$p_{ji}=x_{ji}y_{ji}$

$$\boldsymbol{G}_j=p_{j1}\frac{U_1^2}{P_1}\boldsymbol{Y}_{PCS}(s)+p_{j3}\frac{U_2^2}{P_2}\boldsymbol{Y}_{VSC1}(s)+p_{j3}\frac{U_3^2}{P_3}\boldsymbol{Y}_{VSC3}(s)$$

其中，i=1,2,3，x_{ji}、y_{ji} 分别为 $\boldsymbol{x}_j$、$\boldsymbol{y}_j$ 的第 i 个元素。

表 2 算例的比例参数及实际工况

Tab.2 The proportional parameters and actual operating conditions of examples

算例	k	U	P	$gSCR$
1	1	1.05、0.99、1.03	-0.2、1、0.6	5.19
2	1.5	1.04、0.97、1		3.39
3	2	1.03、0.95、0.99		2.47
4	3	1.01、0.95、0.98		1.67
5	4	0.99、0.93、0.97		1.21

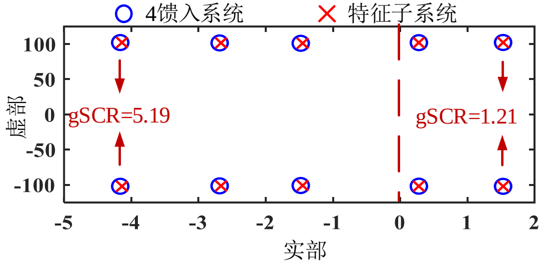


图 5 系统等效前后主导特征根对比图

Fig.5 Comparison of dominant roots before and after equivalence

进一步，结合 4.1 节分析可知，理论上最小正特征值 λ_1 对应的特征子系统能够近似表征原系统的小扰动同步特性。为验证该结论，图 5 给出 4 馈入系统和 λ_1 对应特征子系统的主导特征根。可以看出，随着电网强度的变化，原始系统和该特征子系统的特征根基本一致，验证了该特征子系统可近似原系统的小扰动同步特性。

5.2 基于广义短路比的系统强度量化

搭建某实际新能源基地的电磁暂态仿真模型，如图 6 所示。该系统共包括 4 个区域共 27 个风力发电机组、2 个常规储能系统和 2 个构网型储能系统，其中风力发电机组或储能系统的下标数字代表其内部采用变流器编号；图中节点 1~54 表示装备接入节点，其中节点 43、54 为构网型变流器接入节点，节点 14、15、28、29 为常规储能变流器接入节点，其余节点为新能源变流器接入节点；节点 55~92 表示中间节点；节点 93 为场站外电网等值节点。具体地，考虑如下四个算例情况，算例的装备控制策略、参数及网络参数均一致，如附表 E1-E3 所示；装备实际工况如附表 E4 所示。

算例 1：系统中装备均运行在实际工况，即输出有功功率及端口电压往往偏离额定值，其中，常规储能从电网吸收功率，其余装备向电网发出功率；

算例 2：在算例 1 的基础上将装备工况均调整为额定工况，其中，常规储能仍从电网吸收功率，其余装备向电网发出功率；

算例 3：在算例 1 的基础上将常规储能变流器的工作模式改变为发出功率；

算例 4：在算例 1 的基础上切除构网型变流器，即系统中构网型变流器接入节点悬空。

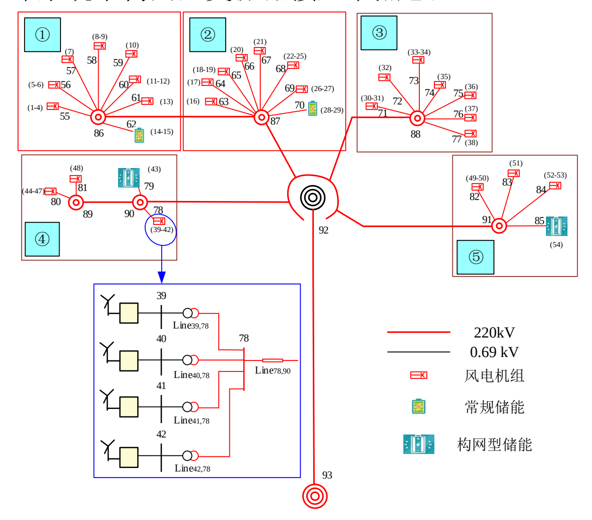


图 6 某实际新能源基地拓扑图

Fig.6 The topology of a practical renewable energy plant

首先，按照上述指标计算流程分别解析计算四

个算例中系统的广义短路比；其次，基于式(21)并通过搭建等效加权单机仿真或解析方法得到四个算例中系统的 SCR_0；最后，基于式(11)，通过比较 gSCR 与 SCR_0 判断系统稳定性，进一步，基于式(12)计算 β%，以评估系统强度。

表 3 给出评估结果。可以看出，算例 1、3、4 中 gSCR 均大于 SCR_0，其中，算例 1 中 β%>20%，满足小扰动稳定裕度需求；算例 2 中 gSCR=2.39 <2.63=SCR_0，系统失稳。该判稳结果与图 7(a)(b)所示算例 1、2 中装备端口电压的时域仿真趋势一致，验证了基于广义短路比的量化方法的有效性。

表 3 算例的指标数值

Tab.3 The values of indexes under four scenarios

算例	gSCR	SCR_0	β%
1	3.28	2.67	22.8%
2	2.39	2.63	-9.1%
3	3.03	2.68	13.1%
4	3.02	2.69	12.3%

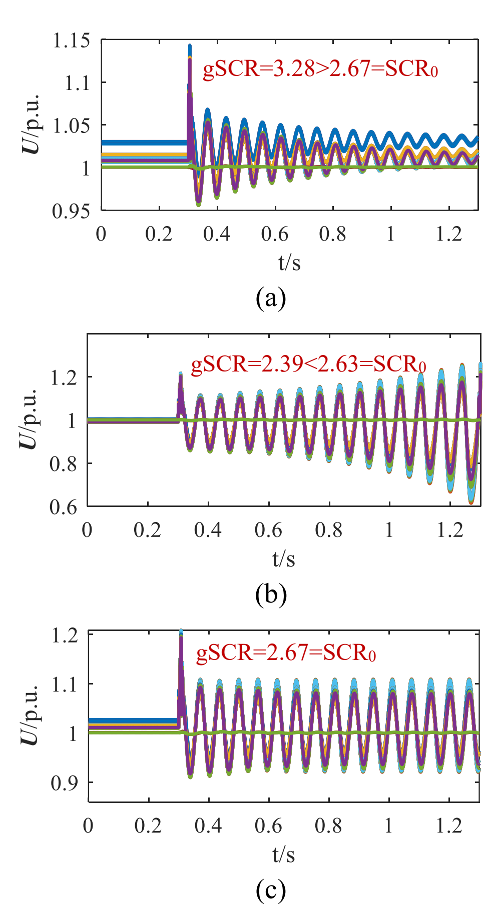


图 7 装备端口电压的时域波形

Fig.7 Time domain waveform of terminal voltages of devices in a practical renewable energy plant under different operating conditions

此外，图 7(c)给出算例 1 中系统在 gSCR= SCR_0 时装备端口电压的等幅振荡波形，验证了 gSCR= SCR_0 在描述系统稳定边界的有效性，此时系统网络参数如附表 E3 所示。

5.3 广义短路比的影响因素

5.3.1 非额定运行点的影响

考虑对比分析装备在实际工况(算例 1) 与额定工况的场景(算例 2)。

首先，在指标计算过程中，算例 1、2 的区别仅在于矩阵 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$ 的不同。具体为：额定工况下 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}_{N52}^{-1}$，$\boldsymbol{S}_{N52}$ 为 52×52 的对角矩阵，元素为装备额定容量，当装备吸收功率，额定容量需加上负号；实际工况下 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(U_i^2/P_i)_{52}$，$\mathrm{diag}(U_i^2/P_i)_{52}$ 为 52×52 的对角矩阵。

其次，如表 3 所示，算例 1、2 中 gSCR 及 SCR_0 都随着工况而发生了变化，说明了实际工况对系统强度的影响。

5.3.2 有功功率反向的影响

考虑对比分析常规储能变流器吸收有功功率(算例 1)与发出有功功率的场景(算例 3)。

首先，根据常规储能变流器在充电或放电工作模式下的物理特性可知，在指标计算过程中，算例 1、3 的主要区别在于矩阵 $\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$ 的不同。具体为，常规储能变流器吸收功率时，$\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}$ 中与其接入节点对应的对角元为负数，使得等效导纳矩阵有对应的负特征值；而发出功率时，相应对角元为正数，对应特征值均为正数。

其次，比较两算例中指标及临界值。可以看出，相较于储能变流器工作于放电模式，功率反向后系统的 gSCR 得到一定提升，SCR_0 稍微改变，说明储能变流器工作于充电模式会提升广义短路比并改变 SCR_0。

5.3.3 构网型装备的影响

考虑构网型变流器接入(算例 1)与不接入的场景(算例 4)。

首先，根据构网型装备的物理特性可知，在指标计算过程中，算例 1、4 的主要区别在于装备对等效网络动态的修正 $\boldsymbol{B}_{IBR}$ 不同。具体为，考虑构网型变流器接入时，$\boldsymbol{B}_{IBR}$ 包含构网型变流器的等效导纳，会修正网络动态；不接入时 $\boldsymbol{B}_{IBR}$ 中元素均为 0。

其次，比较算例 1、4 中广义短路比及 SCR_0。可以看出，接入构网型变流器后系统广义短路比得到一定提升，SCR_0 稍微改变，说明构网型变流器的接入会提升广义短路比并改变 SCR_0。

6 结论与展望

本文给出了多馈入系统的特征子系统定义、物理意义及计算方法，并提出复杂场景下广义短路比及其临界值的通用导出原理与计算方法，包含在非额定运行点、有功功率反向和包含构网型装备等多种场景。特征子系统保留了交流网络与跟网型装备

的动态特性，存在与之对应的低维物理系统，故由此导出的广义短路比计算和系统强度量化方法具有较严谨的理论基础，也有较清晰的物理意义。

本文聚焦跟网型装备主导的稳定模态，其特征子系统为跟网型装备的单机无穷大系统；其它模态下，如构网型装备控制特性不能忽略时，特征子系统还需要保留构网型装备，其特性需深入研究。进一步，特征子系统可能是电力系统的基本单元，包含但不限于单机无穷大系统，其基本理论和方法后续还需进一步完善。

参考文献

[1] 周孝信，陈树勇，鲁宗相，等．能源转型中我国新一代电力系统的技术特征[J]．中国电机工程学报，2018，38(7)：1893-1904．
ZHOU Xiaoxin ， CHEN Shuyong ， LU Zongxiang ， et al．Technology features of the new generation power system in China[J]．Proceedings of the CESS，2018，38(7)：1893-1904 (in Chinese)．

[2] 姜齐荣,王玉芝.电力电子装备高占比电力系统电磁振荡分析与抑制综述[J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(22): 7185-7120.
JIANG Qirong, WANG Yuzhi. Overview of the Analysis and Mitigation Methods of Electromagnetic Oscillations in Power Systems With High Proportion of Power Electronic Equipment [J]. Proceedings of the CSEE, 2020, 40(22): 7185-7120.

[3] 姚致清，于飞，赵倩，等．基于模块化多电平换流器的大型光伏并网系统仿真研究[J]．中国电机工程学报，2013，33(36)：27-33.
Yao Zhiqing，Yu Fei，Qian Zhao，et al．Simulation Research on Large-scale PV Grid-connected Systems Based on MMC[J]．Proceedings of the CSEE，2013，33(36)：27-33(in Chinese)．

[4] 马宁宁，谢小荣，贺静波，等．高比例新能源和电力电子装备电力系统的宽频振荡研究综述[J]．中国电机工程学报, 2020, 40(15): 12.
MA Ningning, XIE Xiaorong, HE Jingbo, et al, Review of wide-band oscillation in renewable and power electronics highly integrated power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2020, 40(15): 12 (in Chinese).

[5] IEEE ． IEEE Std 2800 — 2022 IEEE standard for interconnection and interoperability of inverter-based resources(IBRs) interconnecting with associated transmission electric power systems[S]．New York：IEEE，2022．

[6] 李建林，高志刚，胡书举，等．并联背靠背 PWM 变流器在直驱型风力发电系统的应用[J]．电力系统自动化，2008，32(5)：59-62.
Li Jianlin，Gao Zhigang，Hu Shuju，et al．Application of Parallel Back-to-back PWM Coverter on the Direct-drive Wind Power System[J]．Automation of Electric Power System，2008，32(5)： 59-62(in Chinese)．

[7] 周瑀涵,辛焕海,鞠平.基于广义短路比的多馈入系统强度量化原理与方法：回顾、探讨与展望[J].中国电机工程学报,2023,43(10):3794-3811.
ZHOU Yuhan, XIN Huanhai*, JU Ping. System Strength Quantification Principle and Method of Multi-infeed Systems Based on Generalized Short-circuit Ratio: Reviews, Discussions and Outlooks[J]. Proceedings of the CSEE, 2023,43(10):3794-3811.

[8] 袁辉,辛焕海,王冠中，等.含 SVG 的新能源多馈入系统振荡分析和广义短路比计算[J].电力系统自动化, 2021, 45(14):38-46.
YUAN Hui, XIN Huanhai, WANG Guanzhong. et al. Analysis on Oscillation of Multi-infeed System with Renewable Energy and Static Var Generator and Calculation of Its Generalized Short-circuit Ratio[J]． Automation of Electric Power System,2021,45(14):38-46.

[9] 王康,李子恒,杨超然等.面向大型新能源基地小干扰稳定性提升的调相机选址方法[J].电力系统自动化, 2022, 46(04):66-74.
WANG Kang，LI Ziheng，YANG Chaoran. et al. Siting Method of Synchronous Condenser for Small-signal Stability Improvement of Large-scale Renewable Energy Base[J]. Automation of Electric Power System，2022,46(04):66-74.

[10] YANG C R，HUANG L B，XIN H H，et al. Placing grid-forming converters to enhance small signal stability of PLL integrated power systems［J］. IEEE Transactions on Power Systems，2021，36（4）：3563-3573.

[11] 吴琛,刘晨曦,黄伟等.提升新能源电力系统稳定性的构网型变流器选址定容方法[J].电力系统自动化,2023,47(12):130-136.
WU Chen， LIU Chenxi, HUANG Wei，et al． Siting Selection and Capacity Determination Method of Grid-forming Converters for Improving Stability of Renewable Energy Power System［J］. Automation of Electric Power System，2023,47(12):130-136.

[12] C.W.G. B4. 62, Connection of wind farms to weak ac networks. CIGRE Tech. Brochure 671, pp. 89–120, 2016.

[13] 林伟芳，汤涌，卜广全．多馈入交直流系统短路比的定义和应用[J]．中国电机工程学报, 2008(31): 1-8.
LIN Weifang, TANG Yong, PU Guangquan. Definition and application of short circuit ratio for multi-infeed AC/DC power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2008(31): 1-8. (in Chinese).

[14] WU Di, LI Gangan, JAVADI Milad, et al. Assessing impact of renewable energy integration on system strength using site-dependent short circuit ratio[J]. IEEE Transactions on Sustainable Energy, vol. 9, no. 3, pp. 1072-1080, July 2018.

[15] 孙华东，徐式蕴，许涛，等．新能源多场站短路比定义及指标[J]．中国电机工程学报, 2021, 41(2):497-506.
SUN Huadong, XU Shiyun, XU Tao, et al. Definition and index of short circuit ratio for multiple renewable energy stations[J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(2):497-506 (in Chinese).

[16] DONG Wei, XIN Huanhai, WU Di, et al. Small signal stability analysis of multi-infeed power electronic systems based on grid strength assessment[J]. IEEE Transactions on Power Systems, vol. 34, no. 2, pp. 1393-1403, March 2019.

[17] 辛焕海，甘德强，鞠平．多馈入电力系统广义短路比：多样化新能源场景[J]．中国电机工程学报, 2020, 40(17): 5516-27.
XIN Huanhai, GAN Deqiang, JU Ping. Generalized short circuit ratio of power systems with multiple power electronic devices：analysis for various renewable power generations[J]. Proceedings of the CSEE, 2020, 40(17)：5516-

5526 (in Chinese).
[18] 辛焕海，章枫，于洋，等. 多馈入直流系统广义短路比: 定义与理论分析[J].中国电机工程学报，2016, 36(03): 633-647.
XIN Huanhai, ZHANG Feng, YU Yang, et al. Generalized short circuit ratio for multi-infeed DC systems: definition and theoretical analysis[J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(03): 633-647 (in Chinese).
[19] 郝艺,周瑀涵,刘晨曦等.含跟网型储能的新能源多馈入系统小扰动电压支撑强度分析[J/OL].电工技术学报:1-12[2023-08-07].
Hao Yi, Zhou Yuhan, Liu Chenxi, et al. Small-disturbance Voltage Support Strength Analysis for Renewable Multi-infeed System with Grid-following Energy Storage[J/OL]. Transactions of China Electrotechnical Society :1-12[2023-08-07].
[20] C. Liu, H. Xin, D. Wu, H. Gao, H. Yuan and Y. Zhou, "Generalized Operational Short-Circuit Ratio for Grid Strength Assessment in Power Systems With High Renewable Penetration," IEEE Transactions on Power Systems, doi: 10.1109/TPWRS.2023.3340158.
[21] G. W. Stewart. Matrix perturbation theory[M]. 1990.
[22] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 清华大学出版社. 2004.
Zhang Xianda. Matrix Analysis and Applications[M]. Tsinghua University Press. 2004.
[23] GB/T 19963.1-2021，风电场接入电力系统技术规定——第 1 部分：陆上风电[S].
GB/T 19963.1-2021, Technical specification for connecting wind farm to power system—Part 1: On shore wind power[S].
[24] HUANG Linbin, XIN Huanhai, et al. Identification of Generalized Short-Circuit Ratio for online Stability Monitoring of Wind Farms. [J]. IEEE Transactions on Power Systems, vol. 35, no. 4, pp. 3282-3285, July 2020.

附录 A 引理 1 的举例

以两维矩阵为例说明引理 1。设 $\boldsymbol{M}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 分别为：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_2,\tilde{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_2+\mathrm{diag}(\varepsilon_i)\quad(29)$$

其中，$\varepsilon_i\in\mathbf{R}$，数值较小，$i$=1,2,3,4。

根据式(29)，利用 $\boldsymbol{M}$ 的两个特征子空间可求解 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 广义特征矩阵的近似：

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{L}}_1\approx\boldsymbol{Y}_1^H\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}_1\\&=-0.37\otimes\boldsymbol{I}_2+\begin{bmatrix}0.75\varepsilon_1+0.24\varepsilon_3&\\&0.75\varepsilon_2+0.24\varepsilon_4\end{bmatrix}\end{aligned}\quad(30)$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{L}}_2\approx\boldsymbol{Y}_2^H\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}_2\\&=5.37\otimes\boldsymbol{I}_2+\begin{bmatrix}0.24\varepsilon_1+0.76\varepsilon_3&\\&0.24\varepsilon_2+0.76\varepsilon_4\end{bmatrix}\end{aligned}\quad(31)$$

式中：$\boldsymbol{X}_1=[-0.82\quad 0.57]^T\otimes\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{X}_2=[-0.42\quad -0.91]^T\otimes\boldsymbol{I}_2$

$\boldsymbol{Y}_1^H=[-0.92\quad 0.42]\otimes\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{Y}_2^H=[-0.57\quad -0.84]\otimes\boldsymbol{I}_2$

其中，$\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ 中的列向量为 $\boldsymbol{M}$ 关于二重特征值-0.37 与 5.37 的右特征向量，$\boldsymbol{Y}_1$、$\boldsymbol{Y}_2$ 中的列向量为对应左特征向量，可分别张成特征子空间。

如果 ε_1、ε_2、ε_3、ε_4 分别为 0.4、0.3、0.2、0.1，$\tilde{\boldsymbol{M}}$ 广义特征矩阵及其近似结果分别为：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_1=\begin{bmatrix}-0.021&\\&-0.121\end{bmatrix},\tilde{\boldsymbol{L}}_2=\begin{bmatrix}5.621&\\&5.521\end{bmatrix}\quad(32)$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_1\approx\begin{bmatrix}-0.022&\\&-0.121\end{bmatrix},\tilde{\boldsymbol{L}}_2\approx\begin{bmatrix}5.618&\\&5.518\end{bmatrix}\quad(33)$$

附录 B 式(15)的详细推导

原系统的系统矩阵为：

$$\boldsymbol{T}_{het}^{(1)}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_1(s)&\boldsymbol{T}_2(s)\\\boldsymbol{T}_3(s)&\boldsymbol{T}_4(s)\end{bmatrix}\quad(34)$$

式中：$\boldsymbol{T}_1(s)=\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)+\boldsymbol{B}_1\otimes\boldsymbol{\zeta}(s),\boldsymbol{T}_2(s)=\boldsymbol{B}_2\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)$

$\boldsymbol{T}_3(s)=\boldsymbol{B}_3\otimes\boldsymbol{\zeta}(s),\boldsymbol{T}_4(s)=\boldsymbol{B}_4\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)$

将子矩阵表达式代入并化简，可得：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}_1(s)-\boldsymbol{T}_2(s)\boldsymbol{T}_4^{-1}(s)\boldsymbol{T}_3(s)\\&=\boldsymbol{Y}_{IBR}^{(2)}(s)+\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)\end{aligned}\quad(35)$$

附录 C 引理 2 的证明

根据特征值与特征子空间定义可知，$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2$ 有 n 个二重特征值 λ_j，对应有一组特征子空间 $\Re(\boldsymbol{X}_j)$、$\Re(\boldsymbol{Y}_j)$，其中，$\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{x}_j\otimes\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{Y}_j^H=\boldsymbol{y}_j^H\otimes\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{X}_j$、$\boldsymbol{Y}_j$ 列向量分别为$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2$ 关于 λ_j 的右、左特征向量。因此，根据定义 1 式(3)，用 $\Re(\boldsymbol{X}_j)$ 和 $\Re(\boldsymbol{Y}_j)$ 可求得$(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2$ 的 n 个广义特征矩阵：

$$\boldsymbol{L}_j=\boldsymbol{Y}_j^H\left(\left(\boldsymbol{U}^2/\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}'_{red}\otimes\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{X}_j=\lambda_j\otimes\boldsymbol{I}_2\quad(36)$$

进一步，当原系统矩阵 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ 中等效装备模型相似，$\tilde{\boldsymbol{M}}$、$\boldsymbol{X}_j$ 和 $\boldsymbol{Y}_j$ 满足如下等式：

$$\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{X}_j\tilde{\boldsymbol{L}}_j,\boldsymbol{Y}_j^H\tilde{\boldsymbol{M}}=\tilde{\boldsymbol{L}}_j\boldsymbol{Y}_j^H\quad(37)$$

式中：$\tilde{\boldsymbol{L}}_j=\boldsymbol{Y}_{IBReq}(s)+\lambda_j\otimes\boldsymbol{\zeta}(s)$

比较式(1)、(37)并结合特征子空间定义(定义 1)可知，$\Re(\boldsymbol{X}_j)$、$\Re(\boldsymbol{Y}_j)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{L}}_j$ 分别为原系统矩阵的特征子空间及广义特征矩阵。因此，令 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_{-q}\ldots\boldsymbol{X}_{n-q})$、$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{Y}_{-q}\ldots\boldsymbol{Y}_{n-q})$，利用 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 可将原系统矩阵转换为：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{Y}^H\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}=diag(\tilde{\boldsymbol{L}}_j)\quad(38)$$

由于 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的列向量均线性无关，故 $\det(\tilde{\boldsymbol{M}})$=0 与 $\det(\tilde{\boldsymbol{L}})$=0 等价，即与 $\det(\tilde{\boldsymbol{L}}_k)$=0 等价。因此，对应的特征子系统（$\tilde{\boldsymbol{L}}_k$ 为特征子系统矩阵）可近似原系统的稳定性。证毕。

附录 D 定理 1 的证明

证明：利用 $\Re(\boldsymbol{X}_k)$、$\Re(\boldsymbol{Y}_k)$ 可求解等效同构系统矩阵 $\boldsymbol{M}_k$ 的广义特征矩阵，满足：

$$\boldsymbol{L}_k=\boldsymbol{Y}_k^H\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{G}_k(s)+\lambda_k\cdot\boldsymbol{\zeta}(s)\quad(39)$$

结合式(39)、(19)，等效同构系统的广义特征矩阵是原系统广义特征矩阵的近似。根据引理 1，利用 $\Re\left(\boldsymbol{X}_k\right)$ 和 $\Re\left(\boldsymbol{Y}_k\right)$ 可得广义特征矩阵的近似。证毕。

附录 E

表 E1　新能源及储能变流器控制参数
Table E1 Control parameters of grid-following converters

内容	新能源变流器	储能变流器
交流系统额定容量、电压	1500kVA, 620V	
装备额定容量	1.5MVA	0.68MVA(14,15) 0.72MVA(28,29)
直流侧电容、电压	0.1089p.u., 1.1kV	0.1089p.u., 1.5kV
外环 PI	0.5,40(直流电压)	0.5,20(功率)
滤波电感、电容	0.05、0.0006	0.05、0.0006
电流内环 PI	0.2,60	0.5,15(14,15) 0.3,10(28,29)
锁相环 PI	四馈入系统：14,10400 某实际新能源场站：10,10500(1-13)；21,10300 (16-27); 26,10400 (30-38); 16,10200(39-42,44-48); 31,10200(49-53)	40,24000
电压前馈时间常数	0.00001	

表 E2　构网型变流器控制参数
Table E3 Control parameters of grid-forming converter

内容	数值
装备额定容量	1.5MVA
滤波电感、滤波电容、电阻	0.05、0.0005、0.02
电压外环、电流内环 PI 参数	0.8,12；6,10
构网型变流器惯量系数、阻尼系数	2,20
电压前馈滤波时间常数	0.001

表 E3　仿真电网参数
Table E3 Parameters of Simulations

四馈入系统电网参数(p.u.)				
$X_{1,5}$=0.20	$X_{2,6}$=0.40	$X_{3,7}$=0.60	$X_{1,2}$=0.40	X_{23}=0.40
$X_{1,3}$=0.40	$X_{3,4}$=0.20			
某实际新能源基地电网参数(×10^{-3}p.u.)				
$X_{55,86}$=0.24	$X_{56,86}$=1.00	$X_{57,86}$=2.40	$X_{58,86}$=3.30	$X_{59,86}$=2.90
$X_{60,86}$=2.00	$X_{61,86}$=1.70	$X_{62,86}$=0.03	$X_{63,87}$=1.10	$X_{64,87}$=3.10
$X_{65,87}$=2.30	$X_{66,87}$=1.90	$X_{67,87}$=1.40	$X_{68,87}$=0.35	$X_{69,87}$=0.16
$X_{70,87}$=0.02	$X_{71,88}$=2.50	$X_{72,88}$=2.20	$X_{73,88}$=1.50	$X_{74,88}$=1.30
$X_{75,88}$=0.81	$X_{76,88}$=1.30	$X_{77,88}$=0.81	$X_{78,90}$=0.19	$X_{79,90}$=2.20
$X_{80,89}$=0.19	$X_{81,89}$=2.20	$X_{82,91}$=1.50	$X_{83,91}$=1.30	$X_{84,91}$=1.50
$X_{85,91}$=1.30	$X_{86,87}$=1.00	$X_{87,92}$=3.10	$X_{88,92}$=4.40	$X_{89,90}$=7.00
$X_{90,92}$=7.80	$X_{91,92}$=0.87	$X_{92,93}$=6.90	变压器电抗：　64.0	
算例 1 在 gSCR=SCR_0 时的电网所有参数是上述电网参数的 1.1 倍				

表 E4　某实际新能源基地 4 个算例中的装备实际工况
Table E4　The operating conditions of devices in four examples of Practical Renewable Energy Plant

算例	运行工况	
1	*P*	1-13:0.7;16-27:0.8;30-38:0.6;39-42:0.75; 44-53:0.9;14-15: -0.45;28-29: -0.48;43,54:1.00;
	U	1:13, 16-27, 30-41, 44-48 :1.01;14-15, 28-29:1.03;42,43,54:1.00; 49-53:1.02
2	*P*	1.00
	U	1.00
3	*P*	14-15: 0.45;28-29: 0.48；其余见算例 1
	U	14-15, 28-29:1.01，其余见算例 1
4	*P*	见算例 1
	U	见算例 1

收稿日期：

作者简介：

辛焕海(1981)，男，教授，通信作者，博士生导师，主要研究方向为：新能源电力系统稳定分析与控制。E-mail：xinhh@zju.edu.cn

刘晨曦(1999)，女，博士研究生，主要研究方向为：新能源电力系统稳定分析与控制。E-mail：12010046@zju.edu.cn

Derivation Principle and Calculation Method of Generalized Short-circuit Ratio Based on Eigen-Subsystems

XIN Huanhai[1], LIU Chenxi[1], HUANG Linbin[1], GAO Huisheng[1], JU Ping[1]
(1. College of Electrical Engineering, Zhejiang University)

KEY WORDS: generalized short-circuit ratio; device critical short-circuit ratio; eigen-subsystems

With the large-scale integration of power electronic devices, voltage support strength(referred to as "system strength") decreases, thus threatening the system's safe and stable operation. In both the homogeneous and heterogeneous scenario (i.e., power electronic devices integrated into the system have the same dynamics or weakly different dynamics), system strength can be quantified by the gSCR and SCR_0. However, there is a lack of unified derivation principles and methods. To this end, this paper unified these based on the concept of eigen-subsystems.

Specifically, we consider a power system integrated with types of devices, where *n* devices are grid-following converters or conventional energy storage converters; *m* devices are grid-forming devices. In the small-signal stability analysis, grid-forming devices can be equivalent to an ideal voltage source with the series inductor, whose equivalent admittance is B_{IBRj} (j=1,..., m). Moreover, consider decoupling the actual operating conditions of the remaining *n* devices from their dynamic. Thus, the inverse matrix of the system closed-loop transfer function is

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{Y}_{IBR}(s) + \boldsymbol{Y}_{net}(s) \tag{1}$$

where $\boldsymbol{Y}_{net}(s) = diag\left(U_i^2/P_i\right)\boldsymbol{B}_{red} \otimes \boldsymbol{\zeta}(s)$

$$\boldsymbol{Y}_{IBR}(s) = diag\left(\boldsymbol{Y}_{IBRi}(s)\right)$$

where $\boldsymbol{B}_{red}$ represents the Thevenin equivalent admittance matrix only containing the *n* buses and considering the equivalent admittance B_{IBRj}; $\boldsymbol{Y}_{IBRi}(s)$ is the admittance model of the *i*-th converter, i=1,…,n; P_i and U_i are power output and terminal voltage of the *i*-th converter.

An equivalent system matrix $\boldsymbol{M}_k$ can be constructed in (2), whose eigen-subspace is approximate to its of the actual system matrix $\tilde{\boldsymbol{M}}$ since $\tilde{\boldsymbol{M}}$ can be treated as a perturbation of $\boldsymbol{M}_k$ based on the perturbed theory of eigen-subspace. Moreover, the eigen-subspace $\Re(\boldsymbol{X}_i)$ and $\Re(\boldsymbol{Y}_i)$ of the equivalent admittance matrix diag(U_i^2/P_i)$\boldsymbol{B}_{red} \otimes \boldsymbol{I}_2$ with respect to its own eigenvalues λ_i is the same as matrix $\boldsymbol{M}_k$. Therefore, using $\Re(\boldsymbol{X}_k)$ and $\Re(\boldsymbol{Y}_k)$ ($k\in\{1,\ldots,n\}$), a first-order approximation of the generalized eigen-matrix can be obtained as (3). Let $\tilde{\boldsymbol{L}}_k^{-1}$ be the closed-loop transfer function of the eigen-subsystem, the eigen-subsystem can approximate the stability of the actual system in the corresponding mode. The physical meaning of eigen-subsystems is a decoupled subsystem of the actual system since it physically retains the dynamic characteristics of converter and networks

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{G}_k(s) + \boldsymbol{Y}_{net}(s) \tag{2}$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_k \approx \boldsymbol{Y}_k^H \tilde{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{G}_k(s) + \lambda_k \cdot \boldsymbol{\zeta}(s) \tag{3}$$

where

$$\boldsymbol{G}_k(s) = \boldsymbol{Y}_k^H\left[diag\left(\left(U_i^2/P_i\right)\boldsymbol{Y}_{IBRi}(s)\right)\right]\boldsymbol{X}_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ki}\left(U_i^2/P_i\right)\boldsymbol{Y}_{IBRi}(s),\ p_{ki} = x_{ki}y_{ki}$$

where $\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k \otimes \boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{y}_k \otimes \boldsymbol{I}_2$, the column vectors of $\boldsymbol{X}_k$ and $\boldsymbol{Y}_k$ are the right and left eigenvectors of diag(U_i^2/P_i)$\boldsymbol{B}_{red} \otimes \boldsymbol{I}_2$ with respect to λ_k; x_{ki} and y_{ki} are the *i*-th elements of $\boldsymbol{x}_k$ and $\boldsymbol{y}_k$, respectively.

On this basis, in small-signal stability mode, the system strength depends on the gSCR of the power grid, which is defined as the equivalent admittance corresponding to the eigen-subspace under the 1-th mode of interest:

$$\begin{aligned} gSCR &= \boldsymbol{y}_1^H diag\left(U_i^2/P_i\right)\boldsymbol{B}_{red}\boldsymbol{x}_1 \\ &= \lambda_{\min}^{+}\left(diag\left(U_i^2/P_i\right)\boldsymbol{B}_{red}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

where $\lambda_{\min}^{+}$ represents solving for the minimum positive eigenvalue of matrices.

When the dynamic $\boldsymbol{G}_k(s)$ of the equivalent converter remains unchanged, the smaller the gSCR, the weaker the system strength. Based on this monotonic characteristic, the minimum gSCR required for the equivalent converter to reach a critical stable state can be determined as (5). SCR_0 is precisely equal to the critical value of the gSCR($CgSCR_0$).

$$SCR_0 = \arg_{gSCR}\left\{\det\left(\boldsymbol{G}_k(s_d) + gSCR \cdot \boldsymbol{\zeta}(s_d)\right) = 0\right\} \tag{5}$$

According to (6) and (7), it can be determined whether the system is stable and whether the system meets the stability margin requirements.

$$gSCR \geq CgSCR_0 = SCR_0 \tag{6}$$

$$\beta\% \triangleq \frac{gSCR - SCR_0}{SCR_0} \times 100\% \geq \beta_0\% \tag{7}$$

The effectiveness of the system strength quantification method is verified in cases.